Calcul des variations stochastique pour la mesure de densité uniforme

Nicolas Privault

Equipe d'Analyse et Probabilités, Université d'Evry-Val d'Essonne
Boulevard des Coquibus, 91025 Evry Cedex, France

Résumé.
On définit pour les fonctionnelles d'un processus ponctuel non Markovien Y dont les instants de saut sont donnés par des lois uniformes un gradient $\tilde{D}$ dont l'adjoint étend l'intégrale stochastique compensée par rapport à Y. Une représentation explicite des fonctionnelles du processus en intégrales stochastique est obtenue avec une formule de Clark par deux approches différentes. On étudie la forme de Dirichlet associée à ces opérateurs pour obtenir des critères pour l'absolue continuité et la régularité des densités de variables aléatoires en dimension infinie.

Abstract.
A gradient operator is defined for the functionals of a non-Markovian jump process Y whose jump times are given by uniform probability laws. The adjoint of this gradient extends the compensated stochastic integral with respect to Y. An explicit representation of the functionals of Y as stochastic integrals is obtained via a Clark formula in two different approaches. The associated Dirichlet forms is studied in order to obtain criteria for the existence and regularity of densities of random variables in infinite dimension.

Keywords: Malliavin calculus, Point processes, Chaotic calculus.
Mathematics Subject Classification (1991): 60H07

1 Introduction

Dans le cadre du calcul des variations stochastique sur l'espace de Wiener, un opérateur de gradient est défini pour les fonctionnelles de Wiener, par perturbation des trajectoires du mouvement Brownien dans la direction de l'espace de Cameron-Martin, cf. [10]. L'adjoint de ce gradient coincide avec l'intégrale stochastique d'Itô sur les processus adaptés de carré intégrable, cf. [8], ce qui permet d'appliquer ces outils à l'étude des équations différentielles stochastiques, cf. par exemple [4]. La composition du gradient et de son adjoint donne l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck qui permet, cf. [21], de définir des espaces de Sobolev et des distributions sur l'espace de Wiener. De plus, l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener définit une forme de Dirichlet, ce qui donne des conditions pour l'absolue continuité des fonctionnelles de Wiener, cf. [3]. Des conditions pour la régularité des lois de ces fonctionnelles peuvent aussi être obtenues avec le gradient.

Nous nous intéressons ici à l'extension de ces notions au cas d'espaces de probabilité non gaussiens. Sur l'espace de Poisson, le gradient peut être défini par perturbation des temps de saut du processus. Son adjoint coincide avec l'intégrale stochastique de Poisson compensée sur les processus prévisibles de carré intégrable, cf. [3], [5], [16], et la composition du gradient et de son adjoint donne un opérateur de nombre sur une décomposition chaotique définie à l'aide des polynômes de Laguerre, cf. [3], [16]. Ceci permet, par un principe de transfert exposé dans [17], de transposer à l'espace de Poisson les résultats d'analyse stochastique existant sur l'espace de Wiener. Cette approche fait intervenir une formule d'intégration par parties élémentaire par rapport à la densité exponentielle. Une autre approche, cf. [7], [15], consiste à définir un gradient par différences finies.

Notre but est de développer le calcul stochastique anticipatif dans le cas de la densité uniforme en perturbant les instants de saut d'un processus de saut non Markovien. On obtient par intégration par parties élémentaire un opérateur de divergence qui est une extension de l'intégrale stochastique compensée par rapport à ce processus de saut. Par différences finies, on définira comme dans [15] un autre gradient dont l'adjoint étend également l'intégrale stochastique. Ces opérateurs permettront de représenter les fonctionnelles du processus en intégrales stochastiques de deux façons différentes et d'obtenir des conditions pour l'absolue continuité de lois de variables aléatoires en dimension infinie.

Les approches au calcul des variations stochastique présentées ci-dessus pour les densités gaussienne et exponentielle font intervenir les polynômes de Hermite et de Laguerre qui font partie des polynômes orthogonaux classiques, définis par une équation différentielle du type

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y'(x) + \lambda y = 0, \tag{1}$$

où σ est un polynôme de degré au plus 2, τ est un polynôme de degré au plus 1, et $\lambda \in \mathbb{N}$. Ces polynômes sont orthogonaux sur un intervalle (a, b) par rapport à une densité ρ telle que $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, et on a

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \mid_{x=a,b}= 0.$$

Cette dernière relation est utile pour obtenir une formule d'intégration par parties élémentaire. A des transformations linéaires près, cf. [12], la seule catégorie de polynômes orthogonaux autre que les polynômes de Hermite ou de Laguerre satisfaisant à l'équation (1) est la classe des polynômes de Legendre, lesquels sont orthonormaux par rapport à la densité uniforme sur $[-1, 1]$. Ce sont eux que nous utiliserons pour construire une décomposition chaotique.

Dans la deuxième section, on commence par unifier le formalisme du calcul des variations stochastique sur les espaces de Wiener et de Poisson en définissant dans chaque cas une injection aléatoire reliée au paramètre σ qui définit les polynômes orthogonaux pour chaque mesure. Par cette méthode on définit un gradient $\tilde{D}$ et on établit une formule d'intégration par parties pour la densité uniforme qui fait intervenir l'intégrale stochastique par rapport à un processus de saut non poissonnien noté $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$. Une formule de Clark pour la représentation des fonctionnelles de $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$ en intégrales stochastiques est obtenue à l'aide du gradient $\tilde{D}$. Dans la troisième section, on étudie les relations entre cette analyse et le calcul chaotique sur l'espace de Fock obtenu avec les intégrales multiples par rapport au processus compensé $(Y_t - t/2)$. Cette approche donne en particulier une deuxième formule de Clark, qui fait intervenir l'opérateur d'annihilation sur cette décomposition chaotique, lequel est un opérateur de différence finie. Dans la quatrième section, on définit une seconde décomposition chaotique des fonctionnelles de carré intégrable du processus $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$ à l'aide des polynômes de Legendre. La composition $\mathcal{L} = \tilde{\delta}\tilde{D}$ du gradient $\tilde{D}$ et de son adjoint $\tilde{\delta}$ laisse stable cette décomposition, et permet de définir une structure de Dirichlet qui admet un opérateur carré du champ. On obtiendra ainsi un critère pour l'absolue continuité des fonctionnelles du processus $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$. Dans la dernière partie, on montre que cet opérateur $\mathcal{L}$ est aussi un opérateur de Malliavin au sens de [18]. Il est alors possible d'adapter les démonstrations classiques sur l'espace de Wiener pour obtenir des résultats portant sur la régularité des densités des fonctionnelles de $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$.

2 Intégration par parties et intégration stochastique

Nous commençons par unifier les définitions du gradient sur les espaces de Wiener et de Poisson.

2.1 Cas de l'espace de Wiener

Soient $(W, L^2(\mathbb{R}_+), \mu)$ l'espace de Wiener classique, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+)$, et notons $(B_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien sur (W, μ). Soit

$$F = f\left(\int_0^\infty h_0(t)dB_t, \dots, \int_0^\infty h_n(t)dB_t\right)$$

une fonctionnelle régulière sur l'espace de Wiener, où f est un polynôme. On peut définir un gradient à temps discret par la suite des dérivées partielles de f:

$$DF = \left(\partial_k f\left(\int_0^\infty h_0(t)dB_t, \dots, \int_0^\infty h_n(t)dB_t\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Ce gradient permet d'exprimer des conditions pour la régularité des lois de fonctionnelles du mouvement brownien, mais il n'est pas directement connecté à l'intégrale stochastique. Posons $H = l^2(\mathbb{N})$. Pour relier ce gradient à l'intégrale stochastique d'Itô, on peut utiliser une injection de H dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ que nous noterons $i : H \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$, définie par

$$i(e_k) = h_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

où $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $H = l^2(\mathbb{N})$. La dérivée peut alors être définie sur les fonctionnelles régulières par

$$\hat{D} = i \circ D.$$

Alors l'adjoint de $\hat{D}$ est une extension de l'intégrale stochastique d'Itô, cf. [8].

Remarque. Dans le cas gaussien, les polynômes orthogonaux définis par la relation (1) sont les polynômes de Hermite avec $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-x^2/2)$ et $\sigma = 1$. On a alors

$$\| i(e_k) \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \sigma, \quad k \geq 0. \tag{2}$$

2.2 Cas de l'espace de Poisson

Soit $(B, l^2(\mathbb{N}), P)$ l'espace de Poisson défini dans [16], où B est un espace de suites, et P est une probabilité telle que les applications coordonnées $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de B dans $\mathbb{R}$ soient des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées. De même que sur l'espace de Wiener, un gradient peut être défini comme un processus à temps discret par

$$DF = (\partial_k f(\tau_0, \dots \tau_n))_{k\in\mathbb{N}},$$

où $F = f(\tau_0, \dots, \tau_n)$ est une fonctionnelle régulière, f étant un polynôme en $n+1$ variables. Dans le but d'obtenir un opérateur dont l'adjoint étend l'intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson, on construit un processus à temps continu à partir de ce gradient en définissant une injection aléatoire $i : H \to L^2(\mathbb{R}_+)$ par

$$i(f)(t) = -f(N_{t^-}) \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$(N_t)_{t\geq 0}$ étant le processus de Poisson sur (B, P), défini par $N_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1_{[\tau_0+\dots+\tau_k,\infty[}(t)$. Il est facile d'étendre i aux processus stochastiques à temps discret. On pose

$$\tilde{D} = i \circ D.$$

Alors l'adjoint de $\tilde{D}$ coincide avec l'intégrale de Poisson compensée sur les processus prévisibles de carré intégrable, et le calcul de Malliavin sur l'espace de Poisson peut être développé à partir de cette définition, cf. [3], [5], [17].

Remarque. Dans le cas de la densité exponentielle, l'équation (1) définit les polynômes de laguerre avec $\sigma(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, et

$$\| i(e_k) \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \sigma(\tau_k), \quad k \geq 0. \tag{3}$$

2.3 Cas de la densité uniforme

Nous nous intéressons dans ce travail au cas où ρ est la densité de probabilité uniforme sur $[-1, 1]$. Les polynômes orthogonaux associés sont les polynômes de Legendre, et $\sigma(x) = 1 - x^2$, cf. [12]. L'espace de probabilité que nous considérons est

$$\Omega = \prod_{n\in\mathbb{N}} [-1, 1],$$

muni de la métrique $d(x, y) = \sup_{k\geq 0} \mid x_k - y_k \mid /(k + 1)$ qui en fait un espace séparable, de la tribu de Borel $\mathcal{B}$ associée, et de la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{B})$ définie par son expression sur les ensembles cylindriques:

$$P(\{x \in \Omega \ : \ (x_0, \ldots, x_n) \in E\}) = \frac{1}{2^{n+1}} \lambda_{n+1}(E),$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et E Borélien de $[-1, 1]^{n+1}$, où λ_{n+1} est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Les applications coordonnées

$$\theta_k : \Omega \longrightarrow [-1, 1] \quad k \in \mathbb{N},$$

sont des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées. Soit

$$\mathcal{P} = \{f(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}) \ : \ f \in \mathbb{R}[X^n], \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors $\mathcal{P}$ est dense dans $L^p(\Omega, P)$, $p \geq 1$, par le théorème de convergence des martingales, associé au fait que la fonction caractéristique

$$t \longrightarrow \int_{-1}^{1} exp(-itx)dx/2 = \frac{\sin(t)}{t} \quad t \in \mathbb{R},$$

est analytique en t au voisinage de 0, cf. [9], p. 540. On a de plus:

Proposition 1 *Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des processus $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à temps discret tels que $u_k = (1 - \theta_k^2) f_k(\theta_0, \ldots, \theta_n)$, $0 \leq k \leq n$, avec $f_0, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et $u_k = 0$, $k > n$, $n \in \mathbb{N}$. Cet ensemble est dense dans $L^2(\Omega) \otimes H$.*

Preuve. Comme $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que l'ensemble

$$\left\{(1 - x^2)x^n \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

est total dans $L^2([-1, 1], dx)$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1 - x^2)x^n dx = 0.$$

Ceci implique que $f(x)(1 - x^2) = 0$ $d\rho(x)$-p.p., donc $f = 0$ $d\rho$-p.p.

□

L'étape suivante consistera en la définition d'un gradient, composé avec une injection aléatoire $i : H \to L^2(\mathbb{R}_+)$, en procédant comme sur l'espace de Wiener ou de Poisson. Soit l'opérateur $D : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \otimes H$ défini sur $\mathcal{P}$ par

$$DF = (\partial_k f(\theta_0, \ldots \theta_n))_{k \in \mathbb{N}},$$

pour $F = f(\theta_0, \dots \theta_n)$, f polynôme, $n \in \mathbb{N}$. On a aussi l'expression

$$(DF(\omega), h)_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\omega + \varepsilon h) - F(\omega)}{\varepsilon} \qquad \omega \in \Omega, \ h \in H.$$

Nous définissons également l'adjoint de D.

Définition 1 *Soit $\delta : L^2(\Omega) \otimes H \longrightarrow L^2(\Omega)$ l'opérateur défini sur $\mathcal{U}$ par*

$$\delta(u) = -\sum_{k \in \mathbb{N}} D_k u_k = -trace(Du), \quad u \in \mathcal{U}.$$

Proposition 2 *Les opérateurs D et δ sont adjoints sur $L^2(\Omega)$ et fermables.*

Preuve. Il suffit de remarquer que par intégration par parties en dimension finie par rapport à la densité uniforme,

$$E[(DF, u)_H] = E[F\delta(u)] \quad F \in \mathcal{P}, \ u \in \mathcal{U}$$

car $u_k \mid_{\theta_k = -1,1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Si $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{P}$ qui converge vers $F \in L^2(\Omega)$ et telle que $(DF_n)_{n \geq 0}$ converge vers Φ dans $L^2(\Omega) \otimes H$, alors

$$E\left[(\Phi, u)_H\right] = \lim_{n \to \infty} E\left[(DF_n, u)_H\right] = \lim_{n \to \infty} E\left[F_n \delta(u)\right] = 0, \ u \in \mathcal{U}.$$

Donc $\Phi = 0$ P-p.p. car $\mathcal{U}$ est dense dans $L^2(\Omega) \otimes H$, et D est fermable. Le domaine de D est dense dans $L^2(\Omega)$, donc δ est aussi fermable.

□

Le domaine de δ peut être précisé de la façon suivante.

Proposition 3 *On a pour $u \in \mathcal{U}$:*

$$E\left[\delta(u)^2\right] \leq E\left[\mid Du \mid_{H \otimes H}^2\right].$$

Preuve. Si $u \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} E\left[\delta(u)^2\right] &= \sum_{k,l=0}^{\infty} E\left[D_k u_k D_l u_l\right] = -\sum_{k,l=0}^{\infty} E\left[D_l D_k u_k u_l\right] \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} E\left[D_l u_k D_k u_l\right] \leq E\left[\sum_{k,l=0}^{\infty} (D_l u_k)^2\right] \end{aligned}$$

par intégration par parties par rapport à θ_l puis θ_k, et du fait que $u_k \mid_{\theta_k = -1,1} = 0$ et $D_l u_k \mid_{\theta_k = -1,1} = 0$, $k \neq l$.

$\square$

Comme dans les cas gaussien et poissonnien, c'est à l'aide d'une injection aléatoire de H dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ que l'on va relier le gradient D à une notion d'intégrale stochastique.

Définition 2 *On définit une injection aléatoire $i : H \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ linéaire par*

$$i(e_k)(t) = -\big((1-\theta_k)1_{]2k,2k+1+\theta_k]}(t) - (1+\theta_k)1_{]2k+1+\theta_k,2k+2]}(t)\big) \quad t \in \mathbb{R}_+,\ k \in \mathbb{N}.$$

Cet opérateur s'étend aisément aux processus à temps discret sur (Ω, P).

Remarque. Pour l'injection définie ci-dessus, on a

$$\| i(e_k) \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)} = \sigma(\theta_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Cette relation est à rapprocher des relations (2) et (3).

Définition 3 *On définit un opérateur non borné $\tilde{D} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ par*

$$\tilde{D}F = i \circ DF, \quad F \in \mathcal{P}.$$

Nous définissons maintenant un processus de saut en posant

$$Y_t = \sum_{k \geq 0} 1_{[2k+1+\theta_k,\infty[}(t) \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ce processus n'est pas un processus de Poisson, quelle que soit l'intensité choisie. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Nous allons montrer que l'adjoint du gradient $\tilde{D}$ coincide avec l'intégrale stochastique compensée par rapport à $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur les processus adaptés par rapport à la filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ définie ci-dessous. Posons

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{2k} \quad 2k \leq t < 2k+2,\ k\ \in \mathbb{N}.$$

Si u est un processus $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté, u_{2k+s} dépend seulement de $\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s < 2$. Le compensateur de $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donné par

$$\nu(dt) = \sum_{k\geq 0} \frac{2}{2k+2-t} 1_{[2k,2k+1+\theta_k[}(t)dt, \tag{5}$$

cf. [11], et le processus $(Y_t - t/2)_{t\geq 0}$ n'est pas une martingale. C'est cependant $dt/2$ que l'on utilisera au lieu de $\nu(dt)$ pour compenser dY_t. Ce choix se justifie par la proposition suivante et par le fait que l'adjoint de $\tilde{D}$ sera une extension de l'intégrale stochastique par rapport à $(Y_t - t/2)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble dense dans $L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ des processus à temps continu v tels que $v(t) = f(t, \theta_0, \ldots, \theta_n)$, $t \in \mathbb{R}_+$, avec $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$. On note $[t]$ la partie entière de $t \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 4 *On a si $u, v \in \mathcal{V}$ sont $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adaptés:*

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^\infty u(s)d(Y_s - s/2)\int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2)\right] \\ = \; & E\left[\int_0^\infty \left(u(s) - \sum_{k\geq 0} 1_{]2k,2k+2]}(s)\int_{2k}^{2k+2} u(r)dr/2\right) v(s)ds/2\right] \end{aligned}$$

et

$$E\left[\left(\int_0^\infty u(s)d(Y_s - s/2)\right)^2\right] \leq E\left[\int_0^\infty u(s)^2 ds/2\right].$$

On peut ainsi étendre l'intégrale compensée par rapport à $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à tout processus v $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté de carré intégrable et dans ce cas, $\left(\int_0^{2[t/2]} v(s)d(Y_s - s/2)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-martingale.

Preuve. On a pour $v \in \mathcal{V}$:

$$E\left[\int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2)\right] = E\left[\sum_{k\geq 0} E\left[v(2k+1+\theta_k) - \int_{2k}^{2k+2} v(s)ds/2 \mid \mathcal{F}_{2k}\right]\right] = 0.$$

Donc pour $t \geq 2k$,

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^t v(s)d(Y_s - s/2) \mid \mathcal{F}_{2k}\right] \\ = \; & E\left[\int_0^{2k} v(s)d(Y_s - s/2) \mid \mathcal{F}_{2k}\right] + E\left[\int_{2k}^t v(s)d(Y_s - s/2) \mid \mathcal{F}_{2k}\right] \\ = \; & \int_0^{2k} v(s)d(Y_s - s/2). \end{aligned}$$

D'autre part, écrivant $v = \sum_{k\geq 0} v_k(\cdot, \theta_0, \ldots, \theta_{k-1})$ avec $Support(v_k) \in [2k, 2k+2]$, $k \in \mathbb{N}$, on obtient, puisque la décomposition

$$\int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2) = \sum_{k\geq 0}\left(v(2k+1+\theta_k) - \int_{2k}^{2k+2} v(s)ds/2\right)$$

est orthogonale dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2)\right)^2\right] &= E\left[\sum_{k=0}^\infty v_k(2k+1+\theta_k)^2 + \left(\int_{2k}^{2k+2} v_k(s)ds/2\right)^2\right] \\ & \quad - E\left[2\sum_{k\geq 0} v_k(2k+1+\theta_k)\int_{2k}^{2k+2} v_k(s)ds/2\right] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^\infty \int_{2k}^{2k+2} v_k^2(s)ds/2 - \sum_{k=0}^\infty \left(\int_{2k}^{2k+2} v_k(s)ds/2\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Donc

$$E\left[\left(\int_0^\infty u(s)d(Y_s - s/2)\right)^2\right] \leq E\left[\int_0^\infty u(s)^2 ds/2\right].$$

Par polarisation de l'égalité ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^\infty u(s)d(Y_s - s/2)\int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2)\right] \\ & \quad = E\left[\int_0^\infty u(s)v(s)ds/2\right] - E\left[\sum_{k=0}^\infty \int_{2k}^{2k+2} u_k(s)ds/2 \int_{2k}^{2k+2} v_k(s)ds/2\right]. \end{aligned}$$

□

Définition 4 *Soit $j : L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\Omega) \otimes H$ l'adjoint de $i : L^2(\Omega) \otimes H \to L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, défini par*

$$(i(u), v)_{L^2(\mathrm{R}_+, dx/2)} = (u, j(v))_H \quad u \in \mathcal{U},\ v \in \mathcal{V}, \quad P - p.p.$$

On définit un opérateur non borné $\tilde{\delta} : L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+) \longrightarrow L^2(\Omega)$ par

$$\tilde{\delta}(v) = \delta \circ j(v) \quad v \in \mathcal{V}.$$

On a plus explicitement:

$$j_k(v) = -\frac{1}{2}\left((1-\theta_k)\int_{2k}^{2k+1+\theta_k} v(s)ds - (1+\theta_k)\int_{2k+1+\theta_k}^{2k+2} v(s)ds\right) \quad v \in \mathcal{V},\ k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5 *Les opérateurs $\tilde{D}$ et $\tilde{\delta}$ sont fermables et adjoints. On a de plus:*

$$\tilde{\delta}(v) = \int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2) - \int_0^\infty \tilde{D}_s v(s)ds/2 \quad v \in \mathcal{V}.$$

On notera $\mathbb{D}_{2,1}$ le domaine de l'extension fermée de $\tilde{D}$.

Preuve. Pour $v \in \mathcal{V}$, on a $j(v) \in Dom(\delta)$ par un calcul identique à celui de la proposition 2, et

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(v) &= -trace(Dj(v)) = -\sum_{k\geq 0} D_k j_k(v) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} D_k\left((1-\theta_k)\int_{2k}^{2k+1+\theta_k} v(s)ds\right) - D_k\left((1+\theta_k)\int_{2k+1+\theta_k}^{2k+2} v(s)ds\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} v(2k+1+\theta_k) - \int_{2k}^{2k+2} v(s)ds/2 - \int_{2k}^{2k+2} \tilde{D}_s v(s)ds/2 \\ &= \int_0^\infty v(s)d(Y_s - s/2) - \int_0^\infty \tilde{D}_s v(s)ds/2, \quad v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$E\left[(\tilde{D}F, v)_{L^2(\mathrm{R}_+, dx/2)}\right] = E\left[F\tilde{\delta}(v)\right] \quad v \in \mathcal{V},\ F \in \mathcal{P},$$

du fait que D, δ, resp. i, j sont adjoints. Par conséquent, de même que pour la proposition 2, $\tilde{D}$ et $\tilde{\delta}$ sont fermables, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{V}$ étant denses.

□

Remarque. La formule d'intégration par parties ci-dessus peut être obtenue par une transformation de Girsanov. Soit $F \in \mathcal{P}$, et considérons la perturbation $U : \Omega \longrightarrow H$ de I_Ω définie par $U = j(u)$ où $u \in \mathcal{V}$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, $I_\Omega + \varepsilon U$ est un difféomorphisme de Ω, et

$$E\left[F \circ (I_\Omega + \varepsilon U) det(I_H + \varepsilon DU)\right] = E\left[F\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{D}F, u\right)_{L^2(\mathrm{R}_+)}\right] &= E\left[(DF, j(u))_H\right] = \frac{d}{d\varepsilon} E\left[F \circ (I_\Omega + \varepsilon U)\right] |_{\varepsilon=0} \\ &= -E\left[F \frac{d}{d\varepsilon} det(I_H + \varepsilon DU) \; |_{\varepsilon=0}\right] = -E\left[F trace(Dj(u))\right] \\ &= E[F\delta \circ j(u)] = E[F\tilde{\delta}(u)]. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1 *Si $v \in L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ est $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté, alors $v \in Dom(\tilde{\delta})$ et $\tilde{\delta}(v)$ coincide avec l'intégrale compensée de v par rapport à $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$:*

$$\tilde{\delta}(v) = \int_0^\infty v(s) d(Y_s - s/2).$$

Pour terminer cette section, nous montrons que les fonctionnelles de $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$ admettent une représentation en intégrale stochastique par une formule de Clark, cf. [6]. L'intégrande est donnée par la projection du gradient $\tilde{D}$ suivant la filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$.

Théorème 1 *Soit $F \in \mathbb{D}_{2,1}$. On a*

$$F = E\left[F\right] + \int_0^\infty E\left[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] d(Y_t - t/2). \tag{6}$$

Preuve. Soit $F \in \mathcal{P}$ avec $F = f(\theta_0, \dots, \theta_n)$. On a

$$
\begin{aligned}
& E\left[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] \\
&= -E\left[\sum_{k=0}^{k=n} \left((1-\theta_k)1_{]2k,2k+1+\theta_k]}(t) - (1+\theta_k)1_{]2k+1+\theta_k,2k+2]}(t)\right) \partial_k f(\theta_0, \dots, \theta_n) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} 1_{]2k,2k+2]}(t) \left(E\left[\int_{-1}^{t-2k-1} (1+y)\partial_k f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, y, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) dy/2 \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right] \right. \\
&\quad \left. - E\left[\int_{t-2k-1}^{1} (1-x)\partial_k f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, x, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) dx/2 \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right]\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{k=n} 1_{]2k,2k+2]}(t) \left(E\left[\int_{t-2k-1}^{1} f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, x, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) dx/2 \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right] \right. \\
&\quad -\frac{1}{2} E\left[(2k+2-t) f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, t-2k-1, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2} E\left[(t-2k) f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, t-2k-1, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right] \\
&\quad \left. +E\left[\int_{-1}^{t-2k-1} f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, y, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) dy/2 \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} 1_{]2k,2k+2]}(t) (E\left[f(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, t-2k-1, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n) \mid \mathcal{F}_{2k+2}\right] \\
&\quad -E\left[F \mid \mathcal{F}_{2k}\right]).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\infty E[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t] d(Y_t - t/2) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{k=n} E[f(\theta_0, \dots, \theta_n) \mid \mathcal{F}_{2k+2}] - E[f(\theta_0, \dots, \theta_n) \mid \mathcal{F}_{2k}] \\
&\quad = F - E[F],
\end{aligned}
$$

Cette relation est étendue par continuité, cf. Proposition 4, à tout élément de $\mathbb{D}_{2,1}$.

□

Ce résultat sera étendu à tout $F \in L^2(\Omega)$, cf. théorème 2.

3 Calcul chaotique

Le but de cette section est d'étudier le calcul chaotique sur la décomposition obtenue par itérations de l'intégrale compensée par rapport à $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, en définissant un gradient par différences finies. On note $(\tilde{Y}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus compensé $\tilde{Y}_t = Y_t - t/2$. Soit

$$\Delta_n = \left\{(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n \ : \exists\ k_1<\cdots<k_n \ tels\ que\ t_i\in[2k_i,2k_i+2[,\ 1\leq i\leq n\right\}.$$

Notons $\hat{L}^2(\Delta_n)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable qui sont les symétrisées en n variables de fonctions à support dans Δ_n, $n\geq 1$, et telles que $\int_{2k}^{2k+2} f_n(*,t)dt = 0$ p.p., $k\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Soit $L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n}$ le produit tensoriel symétrique complété de n copies de $L^2(\mathbb{R}_+)$. On munit $\hat{L}^2(\Delta_n)$ de la norme

$$\| f \|^2_{\hat{L}^2(\Delta_n)} = n! \, \| f \|^2_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n}} .$$

On définit pour $f_n\in\hat{L}^2(\Delta_n)$ continue à support compact dans Δ_n l'intégrale de Stieltjes itérée:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_n(f_n) &= n!\int_0^\infty\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2} f_n(t_1,\ldots,t_n)d\tilde{Y}_{t_1}\cdots d\tilde{Y}_{t_n}. \\
&= \sum_{k_1\neq\cdots\neq k_n} f(2k_1+1+\theta_{k_1},\ldots,2k_n+1+\theta_{k_n}).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, c'est $dt/2$ au lieu de $\nu(dt)$, cf. (5), qui est utilisé pour compenser $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$. Si $f_n\in L^2(\Delta_n)$, on pose $\tilde{I}_n(f_n)=\tilde{I}_n(\hat{f}_n)$, où $\hat{f}_n$ est la symétrisée de f_n en n variables.

Proposition 6 *L'application $\tilde{I}_n$ peut être étendue à $\hat{L}^2(\Delta_n)$ comme une application linéaire continue avec*

$$E\left[\tilde{I}_n(f_n)\tilde{I}_n(g_n)\right] = n!\,(f_n,g_n)_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n}}, \quad n\geq 1. \tag{7}$$

On a de plus

$$(\tilde{I}_n(f_n),\tilde{I}_m(g_m))_{L^2(\Omega)} = 0 \quad n\neq m,\ f_n\in\hat{L}^2(\Delta_n),\ g_m\in\hat{L}^2(\Delta_m). \tag{8}$$

Preuve. D'après la proposition 4, on a pour $f,g\in L^2(\Delta_1)$:

$$\left(\tilde{I}_1(f),\tilde{I}_1(g)\right)_{L^2(\Omega)} = (f,g)_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)}.$$

Supposons maintenant le résultat vrai à l'ordre $n-1$, $n\geq 1$. On a

$$\left(\tilde{I}_{n-1}(f_n(*,t)),\tilde{I}_{n-1}(g_n(*,t))\right)_{L^2(\Omega)} = (n-1)!\,(f_n(*,t),g_n(*,t))_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n-1}},$$

dt-p.p. Donc

$$
\begin{aligned}
& E\left[\tilde{I}_n(f_n)\tilde{I}_n(g_n)\right] \\
&= n^2 E\left[\int_0^\infty \tilde{I}_{n-1}(1_{\Delta_n(*,t)} f_n(*,t)) d\tilde{Y}_t \int_0^\infty \tilde{I}_{n-1}(1_{\Delta_n(*,t)} g_n(*,t)) d\tilde{Y}_t\right] \\
&= n^2 E\left[\int_0^\infty \tilde{I}_{n-1}(1_{\Delta_n(*,t)} f_n(*,t)) \tilde{I}_{n-1}(1_{\Delta_n(*,t)} g_n(*,t)) dt/2\right] \\
&= n! n \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_0^t f_n(t_1,\dots,t_{n-1},t) g_n(t_1,\dots,t_{n-1},t) dt_1 \cdots dt_{n-1} dt/2^n \\
&= n! \left(f_n, g_n\right)_{L^2(\mathrm{R}_+, dx/2)^{\circ n}}
\end{aligned}
$$

d'après la proposition 4, car $(\tilde{I}_{n-1}(1_{\Delta_n(*,t)} f_n(*,t)))_{t\in \mathrm{R}_+}$ est un processus $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ adapté de carré intégrable. Pour montrer la relation (8), supposons $n < m$. Soient $k_1,\dots,k_d,\ l_1,\dots,l_p \in \mathbb{N}$ et $u_1,\dots,u_d, v_1,\dots,v_p \in L^2(\mathbb{R}_+)$ tels que $Support(u_i) \subset [2k_i, 2k_i+2[,\ i=1,\dots,d,\ Support(v_j) \subset [2l_j, 2l_j+2[,\ j=1,\dots,p$. On remarque que $v_1 \circ \cdots \circ v_p \in \hat{L}^2(\Delta_m)$ entraine $l_1 \neq \cdots \neq l_p$ et $p = m$. Donc

$$
\left(\tilde{I}_n(u_{k_1} \circ \cdots \circ u_{k_d}), \tilde{I}_m(v_{l_1} \circ \cdots \circ v_{l_p})\right)_{L^2(\Omega)} = 0
$$

par indépendence. Par combinaisons linéaires, on aboutit au résultat cherché.

□

Nous obtenons ainsi une décomposition chaotique de $L^2(\Omega)$.

Proposition 7 *Tout élément $F \in L^2(\Omega)$ admet la décomposition orthogonale*

$$
F = \sum_{n\geq 0} \tilde{I}_n(f_n), \quad f_n \in \hat{L}^2(\Delta_n),
$$

avec les conventions $\hat{L}^2(\Delta_0) = \mathbb{R}$ et $\tilde{I}_0 = I_{\mathrm{R}}$. De plus,

$$
E[F^2] = \sum_{n\geq 0} n! \parallel f_n \parallel^2_{L^2(\mathrm{R}_+, dx/2)^{\circ n}} .
$$

Preuve. Soit $F \in \mathcal{P}$. Par le théorème 1, on a

$$
F = E[F] + \int_0^\infty E\left[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] d\tilde{Y}_t.
$$

Par itérations, on obtient la décomposition cherchée qui est dans ce cas une somme finie, avec

$$
f_n(t_1,\dots,t_n) = E\left[\tilde{D}_{t_1} E\left[\tilde{D}_{t_2} \cdots E\left[\tilde{D}_{t_n} \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n}\right] \cdots \tilde{\mathcal{F}}_{t_2}\right]\right],
$$

$(t_1,\ldots,t_n) \in \Delta_n$. On a $\int_{2k}^{2k+2} f_n(*,t)dt = 0$, $k \in \mathbb{N}$, par la preuve du théorème 1, donc $\| \tilde{I}_n(f_n) \|^2_{L^2(\Omega)} = n! \| f_n \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)^{\circ n}}$ par la proposition 6. Par densité de $\mathcal{P}$ et orthogonalité des intégrales multiples par rapport à $(\tilde{Y}_t)$, le résultat est étendu à $F \in L^2(\Omega)$.

□

L'espace $L^2(\Omega)$ est donc isomorphe au sous-espace $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \hat{L}^2(\Delta_n)$ de l'espace de Fock $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{H}^{\odot n}$, où $\tilde{H}^{\odot n} = L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n}$ est muni de la norme

$$\| f \|^2_{\tilde{H}^{\odot n}} = n! \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)^{\circ n}} .$$

On pose $\tilde{C}_n = \left\{ \tilde{I}_n(f_n) \ : \ f_n \in \hat{L}^2(\Delta_n) \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. La décomposition chaotique $\bigoplus_{n\geq 0} \tilde{C}_n$ introduite ci-dessus permet de s'intéresser aux opérateurs de création et d'annihilation définis comme suit:

Définition 5 *On définit les opérateurs linéaires* $\nabla : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, dx/2)$ *et* $\nabla^* : L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, dx/2) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *par*

$$\nabla \tilde{I}_n(f_n) = n \tilde{I}_{n-1}(f_n),$$
$$\nabla^*(\tilde{I}_n(g_{n+1})) = \tilde{I}_{n+1}(\hat{g}_{n+1}), \quad n \geq 0,$$

si $f_n \in \hat{L}^2(\Delta_n)$, *et si* $g_{n+1} \in \hat{L}^2(\Delta_n) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ *est telle que* $\hat{g}_{n+1} \in \hat{L}^2(\Delta_{n+1})$, *où* $\hat{g}_{n+1}$ *désigne la symétrisée en* $n+1$ *variables de* g_{n+1}, $n \geq 0$.

On remarque que la composition $\nabla^* \nabla$ donne l'opérateur de nombre sur la décomposition chaotique $\bigoplus_{n\geq 0} \tilde{C}_n$:

$$\nabla^* \nabla \tilde{I}_n(f_n) = n \tilde{I}_n(f_n), \quad f_n \in \hat{L}^2(\Delta_n).$$

De plus, ces opérateurs sont des restrictions des opérateurs de création et d'annihilation sur l'espace de Fock $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{H}^{\odot n}$. On a donc d'après [15]:

Proposition 8 *Les opérateurs* ∇ *et* ∇^* *sont adjoints et fermables et*

$$E\left[\| \nabla F \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)} \right] = \sum_{n\geq 0} n n! \| f_n \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)^{\circ n}},$$

où $F \in Dom(\nabla)$ *avec* $F = \sum_{n\geq 0} \tilde{I}_n(f_n)$.

On a également, par le théorème 4.1. de [15]:

Proposition 9 *Soit*

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ u \in L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+) \ : \ u_t \in Dom(\nabla), \ dt - p.p., \ et \ \nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \otimes L^2(\Omega) \right\}.$$

Pour $u, v \in \mathcal{L}^2$, *on a*

$$(\nabla^* u, \nabla^* v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)} + \int_{\mathbb{R}_+^2} (\nabla_s u_t, \nabla_t u_s)_{L^2(\Omega)} \, ds dt.$$

L'opérateur ∇ peut être exprimé comme opérateur de différence finie. On définit l'application $\Psi_t : \Omega \longrightarrow \Omega$ par

$$\Psi_t(\omega) = (\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}, t - 2k - 1, \theta_{k+1}, \ldots), \quad si \ 2k \le t < 2k+2, \ k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 10 *Pour* $F \in Dom(\nabla)$, *on a l'expression suivante de* ∇ *comme opérateur de différence finie:*

$$\nabla_t F = F \circ \Psi_t - \int_{2[t/2]}^{2[t/2]+2} F \circ \Psi_s ds/2, \quad dt \otimes dP - p.p.,$$

donc

$$E[\nabla_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t] = E[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t] \ \ dt \otimes P \ p.p., \quad F \in \mathcal{P}.$$

Preuve. On vérifie la première égalité pour les variables aléatoires de la forme $F = \tilde{I}_n(v_1 \circ \cdots \circ v_n)$, $n \ge 0$. La deuxième égalité provient de l'expression de $E[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t]$ donnée dans la preuve du théorème 1.

$\square$

Cette dernière égalité est aussi une conséquence du fait que, de même que sur l'espace de Poisson, cf. [16], les adjoints ∇^* et $\tilde{\delta}$ de ∇ et $\tilde{D}$ coincident sur les processus $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adaptés:

$$E\left[(\nabla F, u)_{L^2(\mathbb{R}_+, dx/2)}\right] = E\left[F \nabla^*(u)\right] = E\left[F \tilde{\delta}(u)\right] = E\left[(\tilde{D} F, u)_{L^2(\mathbb{R}_+, dx/2)}\right],$$

si u est $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté et de carré intégrable.

Lemme 1 *Si* $f_{n+1} \in \hat{L}^2(\Delta_n) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, *alors*

$$E\left[\tilde{I}_n(f_{n+1}(*, t)) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] = \tilde{I}_n\left(f_{n+1}(*, t) 1_{[0, 2[t/2][^n}(*)\right) \ dt \otimes P - p.p., \tag{9}$$

et pour $F \in Dom(\nabla)$:

$$\nabla_s E\left[F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] = 1_{\{s < 2[t/2]\}} E\left[\nabla_s F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] \quad ds \otimes P - p.p., \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour que $(\tilde{I}(f_{n+1}(*,t)))_{t\in\mathbb{R}_+}$ soit $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté, il est nécessaire et suffisant que $f_{n+1}(t_1,\dots,t_n,t)=0$ si il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $t_i>2[t/2]$. Par ailleurs,

$$E\left[\tilde{I}_m(g_m)\tilde{I}_n\left(f_{n+1}(*,t)1_{[0,2[t/2][}-f_{n+1}(*,t)\right)\right]=0$$

pour tout $g_m\in\hat{L}^2(\Delta_m)$ à support dans $[0,2[t/2][^m$, d'après la proposition 6. On en déduit (10).

□

On a donc le résultat suivant qui montre que ∇^*, de même que $\tilde{\delta}$, est une extension de l'intégrale stochastique sur les processus $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adaptés.

Proposition 11 *Si $v\in L^2(\Omega)\otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ est $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté, alors $v\in Dom(\nabla^*)$ et*

$$\nabla^*(v)=\int_0^\infty v(s)d\tilde{Y}_s.$$

Preuve. Soit la décomposition $v=\sum_{n\geq 0}\tilde{I}_n(v_{n+1})$ avec $v_{n+1}\in\hat{L}^2(\Delta_n)\otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, $n\in\mathbb{N}$. D'après la définition de $\tilde{I}_n$, le résultat est vérifié pour le processus $(\tilde{I}_n(v_{n+1}(*,t)))_{t\in\mathbb{R}_+}$ qui est aussi $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-adapté, car pour tout $g_n\in\hat{L}^2(\Delta_n)$ à support dans $[2[t/2],\infty[^n$, on a dt-p.p.:

$$\begin{aligned}
&n!(v_{n+1}(*,t),g_n)_{L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)^{\circ n}}\\
&= E\left[\tilde{I}_n(v_{n+1}(*,t))\tilde{I}_n(g_n)\right]=E\left[v(t)\tilde{I}_n(g_n)\right]\\
&= E\left[E\left[v(t)\tilde{I}_n(g_n)\mid\tilde{\mathcal{F}}_t\right]\right]=E\left[v(t)E\left[\tilde{I}_n(g_n)\mid\tilde{\mathcal{F}}_t\right]\right]=0.
\end{aligned}$$

Le résultat est donc également vérifié pour v par linéarité et convergence dans $L^2(\Omega)$, cf. Prop. 4.

□

Nous allons montrer que la formule de Clark, cf. théorème 1, peut également s'écrire à l'aide de l'opérateur ∇.

Lemme 2 *Les projections sur $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ de ∇ et $\tilde{D}$ peuvent être étendues comme des opérateurs continus de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)\otimes L^2(\mathbb{R}_+,dx/2)$.*

Preuve. Ce résultat est valable en général sur l'espace de Fock. Si $F = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_n(f_n) \in Dom(\nabla)$ et $u = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_n(u_{n+1})$ avec $u_{n+1} \in \hat{L}^2(\Delta_n) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned}
&| \left(E\left[\nabla.F \mid \tilde{\mathcal{F}}.\right], u\right)_{L^2(\Omega)\otimes L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)} | \\
\leq\ & \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)! \mid \int_0^{\infty} (f_{n+1}(*,t)1_{\{*<2[t/2]\}}, u_{n+1}(*,t))_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n}} dt/2 \mid \\
\leq\ & \sum_{n=0}^{\infty} n! \parallel f_{n+1} \parallel_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n+1}} \parallel u_{n+1} \parallel_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n+1}} \sqrt{n+1} \\
\leq\ & \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! \parallel f_n \parallel^2_{L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)^{\circ n}}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! \parallel u_{n+1} \parallel^2_{L^2(\mathrm{R}_+.dx/2)^{\circ n+1}}\right)^{1/2} \\
\leq\ & \parallel F \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)\otimes L^2(\mathrm{R}_+,dx/2)} .
\end{aligned}$$

Le même résultat pour $\tilde{D}$ est évident d'après la proposition 10.

□

Théorème 2 *On a pour $F \in L^2(\Omega)$*

$$F = E[F] + \int_0^{\infty} E\left[\nabla_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] d\tilde{Y}_t = E[F] + \int_0^{\infty} E\left[\tilde{D}_t F \mid \tilde{\mathcal{F}}_t\right] d\tilde{Y}_t. \qquad (11)$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 6, le lemme ci-dessus et la proposition 10.

□

On obtient également, cf. [19] pour le cas de l'espace de Wiener:

Proposition 12 *Si $F \in \bigcap_{n\geq 1} Dom(\nabla^n)$, alors $F = \sum_{n\geq 0} \tilde{I}_n\left(E\left[\nabla^n F\right]\right)$.*

Preuve. Le résultat s'obtient par itérations de la proposition précédente, en appliquant la relation (10).

□

4 Forme de Dirichlet associée et absolue continuité

Nous commençons par définir une seconde décomposition chaotique de $L^2(\Omega)$ en utilisant cette fois les polynômes de Legendre au lieu des intégrales stochastiques itérées par rapport à $(\tilde{Y}_t)$. Posons $H = l^2(\mathbb{N})$. Soient P_n, $n \geq 0$, les polynômes de Legendre, qui sont définis par l'équation (1) avec $\sigma(x) = 1 - x^2$ et $\tau(x) = -2x$:

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad n \geq 0, \tag{12}$$

soit $\partial^*\sigma\partial P_n = -n(n+1)P_n$ où ∂^* est adjoint de ∂ pour la densité uniforme sur $[-1, 1]$, et qui satisfont à la propriété d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx/2 = (2n+1)1_{\{n=m\}} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

On a explicitement, cf. [12]:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{m=[n/2]} (-1)^m \frac{1}{2^m} C_m^n C_{2n-2m}^n x^{n-2m}, \quad x \in [-1, 1],$$

avec $C_n^k = n/(k!(n-k)!)$, $0 \leq k \leq n$. Soit $H^{\circ n}$ le produit tensoriel symétrique complété de n copies de H.

Définition 6 *On définit pour $n \geq 1$ une application linéaire $I_n : H^{\circ n} \longrightarrow L^2(\Omega)$ par*

$$I_n(e_{k_1}^{\circ n_1} \circ \cdots \circ e_{k_d}^{\circ n_d}) = (2n_1 + 1)^{-1/2} \cdots (2n_d + 1)^{-1/2} P_{n_1}(\theta_{k_1}) \cdots P_{n_d}(\theta_{k_d}),$$

avec $n_1 + \cdots + n_d = n$ et $k_1 \neq \cdots \neq k_d$.

Proposition 13 *L'application I_n s'étend en une application linéaire continue de $H^{\circ n}$ dans $L^2(\Omega)$, avec*

$$E[I_n(f_n)^2] \leq \| f_n \|_{H^{\circ n}} \qquad f_n \in H^{\circ n},$$

et $E[I_n(f_n)I_m(g_m)] = 0$ pour $n \neq m$, $g_m \in H^{\circ m}$.

Preuve. Montrons que

$$(I_n(f_n), I_n(g_n))_{L^2(\Omega)} = (n!)^{-1}(f_n, g_n)_{l^2(E_n)} + (f_n, g_n)_{l^2(F_n)}$$

pour $f_n, g_n \in H^{\circ n}$ à supports finis, où $E_n = \{(k_1, \ldots, k_n) \ : \ \exists\, i \neq j \text{ avec } k_i = k_j\}$ et $F_n = \mathbb{N}^n \backslash E_n$. Par polarisation, il suffit de montrer cette relation pour $f_n = g_n = f^{\circ n}$ où f a un support fini. On a

$$(n!)^{-1}(f^{\circ n}, f^{\circ n})_{l^2(E_n)} + (f^{\circ n}, f^{\circ n})_{l^2(F_n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k_1 \neq \cdots \neq k_d \\ n_1 + \cdots + n_d = n}} (f_{k_1})^{2n_1} \cdots (f_{k_d})^{2n_d} \\
&= E\left[\left(\sum_{k_1,\ldots,k_d} (f_{k_1})^{n_1} \cdots (f_{k_d})^{n_d} I_n(e_{k_1}^{\circ n_1} \cdots e_{k_d}^{\circ n_d})\right)^2\right] \\
&= E[I_n(f^{\circ n})^2].
\end{aligned}
$$

Il est clair que $E[I_n(f_n)I_m(g_m)] = 0$ pour $n \neq m$ car $\{P_n(\theta_k) \ : k, n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonal dans $L^2(\Omega)$.

□

Nous passons maintenant à la définition d'une forme de Dirichlet sur (Ω, P). On pose $\mathcal{L} = \tilde{\delta}\tilde{D}$.

Définition 7 *On définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ par*

$$\epsilon(F, G) = -\frac{1}{2}E[F\mathcal{L}G] = -\frac{1}{2}E\left[(\tilde{D}F, \tilde{D}G)_{L^2(\mathbb{R}_+)}\right] \quad F, G \in \mathcal{P}.$$

On remarque que ϵ est fermable, de domaine $\mathbb{D}_{2,1} \times \mathbb{D}_{2,1}$, avec $1 \in \mathbb{D}_{2,1}$ et $\epsilon(1,1) = 0$.

Proposition 14 *Le quintuplet $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{D}_{2,1}, \epsilon)$ est une structure de Dirichlet locale qui admet un opérateur carré du champ $\Gamma : \mathbb{D}_{2,1} \times \mathbb{D}_{2,1} \longrightarrow L^1(\Omega, P)$ tel que*

$$\Gamma(F, G) = -\frac{1}{2}(\mathcal{L}(FG) - F\mathcal{L}G - G\mathcal{L}F) \quad F, G \in \mathcal{P}.$$

Preuve. Pour $f, g \in \mathbb{R}[X]$, posons

$$\mathbf{e}(f, g) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f'(x) g'(x) dx/2.$$

D'après ce qui précède, $\mathbf{e} : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et fermable. Soit $\mathbf{d}$ le domaine de sa fermeture, et posons $A = -\partial_x \sigma(x) \partial_x$, qui est un opérateur autoadjoint sur $L^2([-1, 1], dx/2)$, tel que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(\theta_k)] &= \delta \circ j \circ i \circ Du(\theta_k) = -D_k(e_k, j \circ i \circ Du(\theta_k))_{l^2(\mathbb{N})} && (13) \\
&= -D_k(i(e_k), i(Du(\theta_k)))_{l^2(\mathbb{N})} && (14) \\
&= -D_k(\sigma(\theta_k) D_k u(\theta_k)) = [A(u)](\theta_k), \quad k \geq 0, \ u \in \mathbb{R}[X], && (15)
\end{aligned}
$$

cf. (4). On a pour $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec $0 \leq u' \leq 1$:

$$2\mathbf{e}(f, u(f)) \ = \ -\int_{-1}^{1} f(x) Au(f)(x) dx/2 = -\int_{-1}^{1} (1 - x^2) u'(f)(x) f'(x)^2 dx/2 \leq 0.$$

Ceci entraine que $\mathbf{e}(f,(f-1)^+) \leq 0$ pour $f \in \mathbf{d}$, par fermabilité. Donc $-A$ est un opérateur de Dirichlet, $\mathbf{e}$ est une forme de Dirichlet, et $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), dx/2, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ est une structure de Dirichlet. On a $\mathbb{R}[X] \subset Dom(A)$, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathbf{d}$, et $f^2 \in Dom(A)\ \forall f \in \mathbb{R}[X]$. Donc d'après [3], Corollaire I.4.2.3., $\mathbf{e}$ admet un opérateur carré du champ $\gamma : \mathbf{d} \times \mathbf{d} \longrightarrow L^1([-1,1], dx)$ donné par

$$\gamma(f,g) = -\frac{1}{2}(A(fg) - fAg - gAf) \quad f, g \in \mathbb{R}[X].$$

On montre que $\mathbf{e}$ est locale en remarquant que pour $f, g \in \mathcal{P}$ tels que

$$Support(f) \bigcap Support(g) = \emptyset,$$

$\mathbf{e}(f,g) = 0$, cf. [3]. La conclusion s'obtient par produit infini de structures de Dirichlet, en utilisant le théorème V.2.2.1 de [3]. On note $\Gamma : \mathbb{D}_{2,1} \times \mathbb{D}_{2,1} \longrightarrow L^1(\Omega, P)$ l'opérateur carré du champ et ϵ la forme de Dirichlet ainsi obtenus.

□

Les deux résultats suivants sont classiques dans le calcul anticipatif sur les espaces de Wiener ou de Poisson, cf. [5], [14], [16].

Proposition 15 *Si $F \in \mathbb{D}_{2,1}$ et $v \in Dom(\tilde{\delta})$ sont tels que $F\tilde{\delta}(v) - \int_0^\infty v(s)\tilde{D}_s F ds \in L^2(\Omega, P)$, alors $Fv \in Dom(\tilde{\delta})$, et*

$$\tilde{\delta}(Fv) = F\tilde{\delta}(v) - \int_0^\infty v(s)\tilde{D}_s F ds.$$

Preuve. Identique à celle du résultat analogue sur les espaces de Wiener et de Poisson, qui fait intervenir le fait que $\tilde{D}$ est une dérivation, cf. [5], [13], [16].

□

Proposition 16 *On a pour $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathbb{R}[X^n]$:*

$$\mathcal{L}f(F_1, \ldots, F_n) = \sum_{i=1}^{i=n} \partial_i f(F_1, \ldots, F_n)\mathcal{L}F_i - \sum_{k,l=1}^{n} \Gamma(F_k, F_l)\partial_k\partial_l f(F_1, \ldots, F_n).$$

De plus, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{D}_{2,1}, \epsilon)$ admet $\tilde{D}$ comme gradient, c.à.d.

$$\Gamma(F,F) = \| \tilde{D}F \|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \quad P-p.p., \ F \in Dom(\tilde{D}).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
LF &= \tilde{\delta}(\sum_{i=1}^{i=n} \partial_i f(F_1, \dots, F_n) \tilde{D} F_i) \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \partial_i f(F_1, \dots, F_n) \tilde{\delta} \tilde{D} F_i - (\tilde{D} F_i, \tilde{D} \partial_i f(F_1, \dots, F_n))_{L^2(\mathrm{R}_+)} \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \partial_i f(F_1, \dots F_n) L F_i - \sum_{k,l=1}^{n} \partial_k \partial_l f(F_1, \dots, F_n) (\tilde{D} F_k, \tilde{D} F_l)_{L^2(\mathrm{R}_+)} \quad F \in \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

Montrons que $\Gamma(F, G) = (\tilde{D} F, \tilde{D} G)_{L^2(\mathrm{R}_+)}$. Par bilinéarité, il suffit de montrer ce qui suit.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(F^2) - 2F\mathcal{L}F \\
&= -\sum_{k,l=1}^{n} (2\partial_k f \partial_l f + 2f \partial_k \partial_l f)(\tilde{D} F_l, \tilde{D} F_k)_{L^2(\mathrm{R}_+)} + \sum_{i=1}^{i=n} 2f \partial_i f(F_1, \dots, F_n) \mathcal{L} \theta_i \\
&\quad -2 \sum_{i=1}^{n} f \partial_i f \mathcal{L} \theta_i + 2 \sum_{k,l=1}^{n} f \partial_k \partial_l f (\tilde{D} \theta_k, \tilde{D} \theta_l)_{L^2(\mathrm{R}_+)} \\
&= -2 \sum_{k,l=1}^{n} (\tilde{D} \theta_l, \tilde{D} \theta_k)_{L^2(\mathrm{R}_+)} \partial_k f \partial_l f \\
&= -2(\tilde{D} F, \tilde{D} F)_{L^2(\mathrm{R}_+)}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 17 *on définit le chaos d'ordre n par*

$$C_n = \{ I_n(f_n) \quad : \quad f_n \in H^{\circ n} \} .$$

On a la décomposition

$$L^2(\Omega, P) = \bigoplus_{n \geq 0} C_n,$$

et le chaos d'ordre n est stable par $\mathcal{L}$: $\mathcal{L} C_n \subset C_n$.

Preuve. La première relation est obtenue par densité de $\mathcal{P}$ et orthogonalité des chaos C_n, $n \geq 1$. La stabilité par $\mathcal{L}$ de la décomposition chaotique vient de ce que par la proposition 16,

$$\mathcal{L} I_n(e_{k_1}^{\circ n_1} \cdots e_{k_d}^{\circ n_d}) = \sum_{l=1}^{l=n} \prod_{i \neq l} I_{n_i}(e^{\circ k_i}) \mathcal{L} I_{n_l}(e^{\circ k_l})$$

pour $k_1 \neq \cdots \neq k_d$, $n_1 + \cdots + n_d = n$, et d'après (15),

$$\mathcal{L}P_n(\theta_k) = -\partial_x \left(\sigma(x)\partial_x P_n(x)\right) |_{x=\theta_k} = n(n+1)P_n(\theta_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

à cause de l'équation différentielle (12) satisfaite par les polynômes de Legendre, cf. aussi l'équation (4).

$\square$

En utilisant le théorème I.7.1.1. de [3], on obtient la condition suivante pour que les fonctionnelles de $(Y_t)_{t\in\mathrm{R}_+}$ aient une densité.

Théorème 3 *Soit $F \in I\!\!D_{2,1}$ tel que $(\tilde{D}F, \tilde{D}F)_{L^2(\mathrm{R}_+)} > 0$ P-p.p. Alors F a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*

5 Régularité des densités

Nous allons montrer dans cette section que les résultats du calcul de Malliavin concernant la régularité $\mathcal{C}^\infty$ des densités peuvent être obtenus pour les fonctionnelles sur (Ω, P) en utilisant les outils précédemment définis. D'après [3], Proposition I.3.2.1., $(P_t)_{t\in\mathrm{R}_+} = (exp(-t\mathcal{L}))_{t\in\mathrm{R}_+}$ est un semi-groupe symétrique sous-markovien car ϵ est une forme de Dirichlet, donc (cf. [3], Proposition I.2.2.1.) il peut être étendu en un semi-groupe de contractions de $L^1(\Omega, P)$, noté $(P_t^{(1)})_{t\in\mathrm{R}_+}$, et le générateur de $(P_t^{(1)})_{t\in\mathrm{R}_+}$, appelé $\mathcal{L}^{(1)}$, est la plus petite extension fermée de la restriction de $\mathcal{L}$ à

$$\left\{F \in Dom(\mathcal{L}) \bigcap L^1(\Omega, P) \quad : \quad \mathcal{L}F \in L^1(\Omega, P)\right\}.$$

Nous pouvons aussi étendre la formule donnant l'opérateur carré du champ Γ de la façon suivante:

Proposition 18 *L'opérateur Γ est continu pour la norme du graphe de $\mathcal{L}$, avec*

$$\Gamma(F, G) = -\frac{1}{2}(\mathcal{L}^{(1)}(FG) - F\mathcal{L}G - G\mathcal{L}F) \quad F, G \in Dom(\mathcal{L}).$$

Preuve. cf. [1]. On a pour $F, G \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
&E[| \,\Gamma(F, F) - \Gamma(G, G)\, |] \\
&\leq \; E\left[(\sqrt{\Gamma(F, F)} - \sqrt{\Gamma(G, G)})(\sqrt{\Gamma(F, F)} + \sqrt{\Gamma(G, G)})\right] \\
&\leq \; E\left[\sqrt{\Gamma(F - G, F - G)}(\sqrt{\Gamma(F, F)} + \sqrt{\Gamma(G, G)})\right] \\
&\leq \; E\left[\sqrt{\Gamma(F - G, F - G)}\right]^{1/2} \times 2\max(E\left[\Gamma(F, F)\right]^{1/2}, E\left[\Gamma(G, G)\right]^{1/2}) \\
&\leq \; \| \,F - G\, \|_{L^2(\Omega,P)} \| \,\mathcal{L}(F - G)\, \|_{L^2(\Omega,P)} \times 2\max(E[\Gamma(F, F)]^{1/2}, E[\Gamma(G, G)]^{1/2}).
\end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité. Par densité, fermabilité de $\mathcal{L}^{(1)}$ et continuité de Γ, on obtient

$$\mathcal{L}^{(1)}(FG) = F\mathcal{L}G + G\mathcal{L}F - 2\Gamma(F,G) \quad F,G \in Dom(\mathcal{L}).$$

$\square$

Proposition 19 *L'opérateur $\mathcal{L}$ est un opérateur de Malliavin au sens de Stroock [18].*

Preuve. Nous faisons référence à la définition donnée dans [1]. Sachant que d'après la proposition 14, $-\mathcal{L}/2$ définit une forme de Dirichlet admettant un opérateur carré du champ et étant donné la proposition 16, il reste à vérifier les points suivants. On a

$$\mathcal{P} \subset \left\{ F \in Dom(\mathcal{L}) \bigcap L^4(\Omega, P) \ : \ \mathcal{L}F \in L^4(\Omega, P), \ F^2 \in Dom(\mathcal{L}) \right\}.$$

De plus, le graphe de $\mathcal{L}$ restreint à $\mathcal{P}$ est dense dans le graphe de $\mathcal{L}$, et

$$\left\{ F \in Dom(\mathcal{L}^{(1)}) \bigcap L^2(\Omega, P) \ : \ \mathcal{L}^{(1)}F \in L^2(\Omega, P) \right\} \subset Dom(\mathcal{L}),$$

d'après [3], I.2.4.2.

$\square$

Dans ces conditions on a le théorème suivant, dont la preuve est identique au cas de l'espace de Wiener, cf. [2], [18]. Le résultat est donné ici pour des fonctionnelles à valeurs réelles, mais peut être obtenu de la même manière pour des fonctionnelles à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème 4 *Soit Φ une variable aléatoire satisfaisant aux conditions suivantes:*

1. *Posons $g_0 = \{\Phi\}$, $g_{n+1} = \{\phi, \mathcal{L}\phi, \Gamma(\phi,\phi) \ : \ \phi \in g_n\}$, $n \geq 0$. Supposons que*

$$g_n \subset Dom(\mathcal{L}) \ \ et \ \ g_n \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p(B,P) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. *Soit $\sigma = \Gamma(\Phi,\Phi)$. Supposons que*

$$\frac{1}{\sigma} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(B,P).$$

Alors la loi de Φ a une densité $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

References

[1] D. R. Bell. *The Malliavin Calculus.* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 34. Longman, 1987.

[2] K. Bichteler, J.B. Gravereaux, and J. Jacod. *Malliavin Calculus for Processes with Jumps.* Stochastics Monographs. Gordon and Breach, 1987.

[3] N. Bouleau and F. Hirsch. *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space.* de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, New York, 1991.

[4] R. Buckdahn. Linear Skorohod stochastic differential equations. *Probability Theory and Related Fields*, 90:223–240, 1991.

[5] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics*, pages 63–73. Kluwer, 1990.

[6] J.M.C. Clark. The representation of functionals of brownian motion by stochastic integrals. *Annals of Mathematical Statistics*, 41:1281–1295, 1970.

[7] A. Dermoune, P. Krée, and L. Wu. Calcul stochastique non adapté par rapport à la mesure de Poisson. In *Séminaire de Probabilité XXII.* Springer Verlag, 1988.

[8] B. Gaveau and P. Trauber. L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel. *Journal of Functional Analysis*, 46:230–238, 1982.

[9] I.I. Gihman and A.V. Skorohod. *The Theory of Stochastic Processes*, volume I. Springer-Verlag, 1974.

[10] P. Malliavin. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. In *Intern. Symp. SDE. Kyoto*, pages 195–253, Tokyo, 1976. Kinokumiya.

[11] M. Métivier. *Semimartingales: a Course on Stochastic Processes.* de Gruyter, 1982.

[12] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov. *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkäuser, 1988.

[13] D. Nualart. Noncausal stochastic integrals and calculus. In H. Korezlioglu and A.S. Üstünel, editors, *Stochastic Analysis and Related Topics*, volume 1316 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1986.

[14] D. Nualart and E. Pardoux. Stochastic calculus with anticipative integrands. *Probability Theory and Related Fields*, 78:535–582, 1988.

[15] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In *Séminaire de Probabilité de l'Université de Strasbourg XXIV*, 1990.

[16] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51:83–109, 1994.

[17] N. Privault. Inégalités de Meyer sur l'espace de Poisson. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I*, 318:559–562, 1994.

[18] D. Stroock. The Malliavin calculus, a functional analytic approach. *Journal of Functional Analysis*, 44:212–257, 1981.

[19] D. Stroock. Homogeneous chaos revisited. In *Séminaire de Probabilités XXI*, 1987.

[20] A.S. Üstünel. Representation of the distributions on Wiener space and stochastic calculus of variations. *Journal of Functional Analysis*, 70:126–129, 1987.

[21] S. Watanabe. *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus*. Tata Institute of Fundamental Research, 1984.