(Probabilités)

Calcul des variations stochastique pour les martingales

Nicolas Privault

Résumé - Le but de cette note est d'unifier les approches existantes au calcul des variations stochastique et de les étendre à certaines martingales qui peuvent être construites par changements de temps sur les espaces de Wiener et de Poisson. Les structures de l'analyse stochastique sur l'espace de Wiener sont préservées en introduisant des espaces de Cameron-Martin aléatoires.

Stochastic Calculus of Variations for Martingales

Abstract - *The aim of this note is to unify the existing approaches to the stochastic calculus of variations and to extend them to some martingales that can be constructed by time changes on the Wiener and Poisson spaces. The structures of stochastic analysis on Wiener space are preserved by the introduction of random Cameron-Martin spaces.*

Abridged English Version

Let $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ be a real locally integrable martingale starting from 0, with jumps of height one on a probability space $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathcal{F}_\infty, P)$, with the decomposition $M = M^c + X - \nu$, where $(M_t^c)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is the continuous part of $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a point process on $\mathbb{R}_+$ independent of $(M_t^c)_{t\in\mathbb{R}_+}$, and $(\nu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is the compensator of $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Let $\beta =< M^c >$ denote the quadratic variation of $(M_t^c)_{t\in\mathbb{R}_+}$. There is a Wiener process $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and a Poisson process $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ such that $M^c = B \circ \beta$ and $X = N \circ \nu$. Let $(\mathcal{F}_t^B)$ and $(\mathcal{F}_t^N)$ denote the filtrations generated by $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. We assume that the trajectories of $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(\nu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ are continuous and strictly increasing, and that $(\beta_t^{-1})_{t\in\mathbb{R}_+}$, resp. $(\nu_t^{-1})_{t\in\mathbb{R}_+}$, is $(\mathcal{F}_t^B)$, resp. $(\mathcal{F}_t^N)$-adapted. Let $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$, let $\xi_k = \int_0^\infty h_k(t)dB_t$ and denote by τ_k the time between the jumps k and $k+1$ of $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $k \in \mathbb{N}$. Let $\mathcal{P}$ be a dense set of smooth cylindrical functionals in $L^2(\Omega)$, and denote by $\hat{D}$, resp. $\tilde{D}$, the gradient operator on the Wiener, resp. Poisson space, cf. [1], [2], [3]. We define a closable gradient operator $\mathcal{D}$ and a random Cameron-Martin space H as

$$\mathcal{D}F = ((\hat{D}F) \circ \beta, (\tilde{D}F) \circ \nu), \quad F \in \mathcal{P},$$

and

$$H = \left\{ (u,v) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \textit{ measurable } : \mid (u,v) \mid_H^2 = \int_0^\infty u^2(t)d\beta_t + \int_0^\infty v^2(t)d\nu_t < \infty \right\}.$$

Then $\mid \mathcal{D}F \mid_H^2 = \mid \hat{D}F \mid_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \mid \tilde{D}F \mid_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2$, $F \in \mathcal{P}$. This definition of $\mathcal{D}$ is consistent with the notions of derivation introduced in [4], [5], [6], [1]. We define the adjoint $\mathcal{D}^*$ of $\mathcal{D}$ with $\mathcal{D}^*((u,v)) = \hat{\delta}(u \circ \beta^{-1}) + \tilde{\delta}(v \circ \nu^{-1})$, u, v being smooth processes. It satisfies to

$$E[F\mathcal{D}^*(u)] = E[(\mathcal{D}F, u)_H].$$

Proposition 1 *Let $(u_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ be $(\mathcal{F}_t)$-predictable with $E[\int_0^\infty u^2(t)(d\beta_t + d\nu_t)] < \infty$. Then $(u,u) \in Dom(\mathcal{D}^*)$ and $\mathcal{D}^*((u,u))$ coincides with the stochastic integral of u with respect to $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$:*

$$\mathcal{D}^*((u,u)) = \int_0^\infty u(t)dM_t.$$

The space $L^2(\Omega)$ has the chaotic decomposition

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n,m\in\mathbb{N}} C_{n,m},$$

where $C_{n,m} = \{I_{n,m}(f_{n,m}) \ : \ f_{n,m} \in L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n} \circ l^2(\mathbb{N})^{\circ m}\}$, and $I_{n,m}$ is defined with the Hermite and Laguerre polynomials.

Proposition 2 *We have $\mathcal{D}^*\mathcal{D} = \hat{\delta}\hat{D} + \tilde{\delta}\tilde{D}$, hence*

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D}I_{n,m}(f_{n,m}) = (n+m)I_{n,m}(f_{n,m}), \quad f_{n,m} \in L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n} \circ l^2(\mathbb{N})^{\circ m}, \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

The usual results of stochastic analysis can be expressed with $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$, and applied to the functionals of $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. In particular, Sobolev spaces $\mathbb{D}_{p,k}$ can be defined on Ω as the completion of $\mathcal{P}$ with respect to $\| F \|_{p,k} = \| (I + \mathcal{D}^*\mathcal{D})^{k/2} F \|_p$, $p > 1$, $k \in \mathbb{Z}$, and if $F \in \cap_{p,k}\mathbb{D}_{p,k}$ satisfies to $(\mathcal{D}F, \mathcal{D}F)_H^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, then F has a $\mathcal{C}^\infty$ density, cf. [7], [8]. Finally, we notice that other constructions are possible for the gradient and its adjoint. For instance, consider the process $X = \sum_{n\geq 0} 1_{[2n+1+\theta_n,\infty[}$, where $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a collection of i.i.d. uniform random variables on $[-1,1]$. It is possible to define $\mathcal{D}$ in such a way that its adjoint extends the stochastic integral with respect to $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ compensated with $dt/2$ instead of $d\nu_t$, and in this case the spectral decomposition of $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ involves the Legendre polynomials instead of the Hermite or Laguerre polynomials, cf. [9].

1 Introduction

L'un des objectifs du calcul des variations stochastique est d'obtenir des conditions pour l'existence des densités de fonctionnelles d'un processus stochastique, cf. [10] sur l'espace de Wiener et [4], [11], [12], [5] par perturbation de processus ponctuels. Un autre but est la construction du calcul stochastique anticipatif, cf. [6] sur l'espace de Wiener et [1], [2] pour le processus de Poisson standard, par perturbation infinitésimale des instants de saut. L'objet de cette note est d'unifier et d'étendre dans le cas unidimensionnel les approches citées plus haut, en considérant une martingale réelle $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ayant une partie continue et des sauts de hauteur un. En utilisant les opérateurs gradient sur les espaces de Wiener et de Poisson standard, on construit par changement de temps un gradient pour les fonctionnelles de $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Du point de vue du calcul anticipatif, l'adjoint de ce gradient étend à des processus non adaptés l'intégrale stochastique par rapport à $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, la composition de ce gradient et de son adjoint permet de transporter les structures classiques, en particulier les décompositions chaotiques, et donc de transcrire et d'appliquer les résultats de régularité de densités existant sur l'espace de Wiener. Ce transport de structure rappelle la méthode de [13], qui concerne le calcul stochastique sur les groupes de Lie. Dans le cas où la martingale considérée est le processus de Wiener ou un processus ponctuel compensé on retrouve les constructions de [6] ou de [4] et [5] qui utilisent le théorème de Girsanov.

2 Le processus considéré

Soit une martingale réelle localement de carré intégrable $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ partant de zéro, à sauts de hauteur un sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathcal{F}_\infty, P)$, où $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration engendrée par $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On a la décomposition

$$M = M^c + X - \nu,$$

où $(M_t^c)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la partie continue de $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ indépendant de $(M_t^c)_{t\in\mathbb{R}_+}$, et $(\nu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le compensateur de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Soit $\beta =< M^c >$ la variation quadratique de $(M_t^c)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On suppose que $\lim_{t\to\infty}\beta_t$ et $\lim_{t\to\infty}\nu_t = \infty$ p.s. Alors, cf. [14], il existe un processus de Wiener $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et un processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ tels que $M^c = B\circ\beta$ et $X = N\circ\nu$. Soient $(\mathcal{F}_t^B)$ et $(\mathcal{F}_t^N)$ les filtrations engendrées par $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On fait les hypothèses suivantes:

(i) Les trajectoires de $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\nu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont continues et strictement croissantes.

(ii) Le processus $(\beta_t^{-1})_{t\in\mathbb{R}_+}$, resp. $(\nu_t^{-1})_{t\in\mathbb{R}_+}$, est $(\mathcal{F}_t^B)$, resp. $(\mathcal{F}_t^N)$-adapté.

Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On pose $\xi_k = \int_0^\infty h_k(t)dB_t$ et on note τ_k l'intervalle de temps entre les sauts k et $k+1$ de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $k\in\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctionnelles F de la forme

$$F = f(\xi_0, \ldots, \xi_n, \tau_0, \ldots, \tau_n),$$

où $f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n+2})$ et $n\in\mathbb{N}$. Par l'hypothèse (ii), $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty^B \vee \mathcal{F}_\infty^N$, donc $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. L'opérateur gradient $\hat{D}$, resp. $\tilde{D}$, sur l'espace de Wiener, resp. de Poisson standard est défini de la façon suivante si F est de la forme ci-dessus, cf. [1], [2], [3]:

$$\hat{D}F = \sum_{k=0}^{k=n} h_k \partial_k f(\xi_0, \ldots, \xi_n, \tau_0, \ldots, \tau_n),$$

$$\tilde{D}F = -\sum_{k=n+2}^{k=2n+2} 1_{]T_k, T_{k+1}]} \partial_k f(\xi_0, \ldots, \xi_n, \tau_0, \ldots, \tau_n),$$

où $T_k = \sum_{i=0}^{i=k-1}\tau_i$ est le k-ième temps de saut de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On sait que l'opérateur $\hat{D}$, resp. $\tilde{D}$, est fermable de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)\otimes L^2(\mathbb{R}_+)$, et que son adjoint non borné $\hat{\delta}$, resp. $\tilde{\delta}$, étend à des processus anticipants l'intégrale de Wiener, resp. de Poisson compensée.

3 Le gradient et son adjoint

Définition 1 *On pose pour $F\in\mathcal{P}$*

$$\mathcal{D}F = ((\hat{D}F)\circ\beta, (\tilde{D}F)\circ\nu). \tag{1}$$

On définit un espace de Cameron-Martin aléatoire

$$H = \left\{(u,v) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \ mesurable \ : |\ (u,v)\ |_H^2 = \int_0^\infty u^2(t)d\beta_t + \int_0^\infty v^2(t)d\nu_t < \infty\right\},$$

et on pose

$$\mathcal{L}_2(M) = \left\{(u,v) : \Omega\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \ \ mesurable \ : \ E\left[|\ (u,v)\ |_H^2\right] < \infty\right\}.$$

Il est clair que pour $F\in\mathcal{P}$,

$$|\ \mathcal{D}F\ |_H^2 = |\ \hat{D}F\ |_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + |\ \tilde{D}F\ |_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2, \tag{2}$$

donc $\mathcal{D}$ est fermable de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{L}_2(M)$. De plus:

Remarque 1 *Choisissons* $F \in \mathcal{P}$, $F = f(T_1, \dots, T_n)$, *une fonctionnelle régulière de* $(X_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$, *et* $(0,h) \in \mathcal{L}_2(M)$. *Alors*

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}F, (0,h))_H &= ((\tilde{D}F)\circ\nu, h)_{L^2(\mathbb{R}_+, d\nu)} = -\sum_{k=1}^{k=n} \partial_k f(T_1, \dots, T_n) \int_0^{\nu^{-1}(T_k)} h(t) d\nu_t \\ &= -\frac{d}{d\varepsilon} f\left(\int_0^{\nu^{-1}(T_1)} (1+\varepsilon h(t)) d\nu_t, \dots, \int_0^{\nu^{-1}(T_n)} (1+\varepsilon h(t)) d\nu_t \right) |_{\varepsilon=0} .\end{aligned}$$

Ceci signifie que $(\mathcal{D}F, (0,h))_H$ est défini par perturbation infinitésimale du k-ième temps de saut $\nu^{-1}(T_k)$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en

$$\nu^{-1}\left(\int_0^{\nu^{-1}(T_k)} (1+\varepsilon h(t)) d\nu_t \right),$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, et on retrouve le type de perturbation introduit par [4] pour les processus de Lévy et par [5] pour les processus ponctuels. On pose

$$\mathcal{U} = \left\{ \sum_{k=0}^{k=n} (u_k h_k \circ \beta, v_k h_k \circ \nu) \ : \quad u_0, \dots, u_n, v_0, \dots v_n \in \mathcal{P}, \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

qui est dense dans $\mathcal{L}_2(M)$.

Définition 2 *On définit* $\mathcal{D}^* : \mathcal{U} \to L^2(\Omega)$ *par* $\mathcal{D}^*((u,v)) = \hat{\delta}(u\circ\beta^{-1}) + \tilde{\delta}(v\circ\nu^{-1})$.

Il est clair que

$$E[F\mathcal{D}^*(u)] = E[(\mathcal{D}F, u)_H] \quad F \in \mathcal{P}, \ u \in \mathcal{U},$$

donc $\mathcal{D}^* : \mathcal{L}_2(M) \to L^2(\Omega)$ est fermable et adjoint de $\mathcal{D}$. De plus, l'opérateur $\mathcal{D}^*$ coincide avec l'intégrale stochastique par rapport à $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur les processus prévisibles dans $\mathcal{L}_2(M)$:

Proposition 1 *Si* $(u_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-prévisible et* $E[\int_0^\infty u^2(t)(d\beta_t + d\nu_t)] < \infty$, *alors* $(u,u) \in Dom(\mathcal{D}^*)$ *et*

$$\mathcal{D}^*((u,u)) = \int_0^\infty u(t) dM_t.$$

(Pour $(u,v) \in \mathcal{U}$, les intégrales $\int_0^\infty u(t) dM_t^c$ et $\int_0^\infty v(t) d(X_t - \nu_t)$ sont définies par leurs sommes de Riemann).

Preuve. Si $(u,u) \in \mathcal{L}_2(M)$ est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible, $u\circ\beta^{-1}, u\circ\nu^{-1} \in L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}_+))$, et $u\circ\beta^{-1}$, resp. $u\circ\nu^{-1}$, est $(\mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_\infty^N)$, resp. $(\mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{F}_\infty^B)$-prévisible par les hypothèses (i) et (ii), donc

$$\mathcal{D}^*((u,u)) = \hat{\delta}(u\circ\beta^{-1}) + \tilde{\delta}(u\circ\nu^{-1}) = \int_0^\infty u(\beta_t^{-1}) dB_t + \int_0^\infty u(\nu_t^{-1}) d(N_t - t) = \int_0^\infty u(t) dM_t,$$

cf. [14], car sur les processus $(\mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_\infty^N)$, resp. $(\mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{F}_\infty^B)$-prévisibles de carré intégrable, $\hat{\delta}$, resp. $\tilde{\delta}$, coincide avec l'intégrale stochastique de Wiener, resp. de Poisson compensée, cf. [6], [1], [2]. □

Par ailleurs, on pour $(u,v) \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^*((u,v)) &= \int_0^\infty u(t)dM_t^c + \int_0^\infty v(t)d(X_t - \nu_t) - \int_0^\infty \mathcal{D}_t^{(1)}(u \circ \beta^{-1}(t))d\beta_t \\ &\quad - \int_0^\infty \mathcal{D}_t^{(2)}(v \circ \nu^{-1}(t))d\nu_t.\end{aligned}$$

Nous remarquons qu'en plus de l'égalité de normes (2), la structure chaotique de l'espace de Wiener est préservée par la composition de $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{D}$. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $l^2(\mathbb{N})$. On sait qu'il est possible de construire des applications linéaires bornées $I_{n,m}$: $L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n} \circ l^2(\mathbb{N})^{\circ m} \to L^2(\Omega)$ par

$$I_{n,m}(h_{k_1}^{\circ n_1} \circ \cdots \circ h_{k_d}^{\circ n_d} \circ e_{l_1}^{\circ m_1} \circ \cdots \circ e_{l_p}^{\circ m_p}) = \prod_{i=1}^{i=d} \sqrt{n_i!} H_{n_i}(\xi_{k_i}) \prod_{j=1}^{j=p} m_j! L_{m_j}(\tau_j),$$

avec $k_1 \neq \cdots \neq k_d$, $l_1 \neq \cdots \neq l_p$, $n_1 + \cdots + n_d = n$, $m_1 + \cdots + m_p = m$, à l'aide des polynômes de Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Laguerre $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cf. [2], [7]. Ces applications réalisent une décomposition en somme directe orthogonale $L^2(\Omega) = \bigoplus_{n,m\in\mathbb{N}} C_{n,m}$, où $C_{n,m} = \{I_{n,m}(f_{n,m}) \ : \ f_{n,m} \in L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n} \circ l^2(\mathbb{N})^{\circ m}\}$, et peuvent être interprétées commes des intégrales stochastiques multiples. De plus, $C_{n,m}$ est un sous-espace propre de valeur propre n, resp. m, pour $\hat{\delta}\hat{D}$, resp. $\tilde{\delta}\tilde{D}$.

Proposition 2 *On a* $\mathcal{D}^*\mathcal{D} = \hat{\delta}\hat{D} + \tilde{\delta}\tilde{D}$. *Par conséquent,*

$$\mathcal{D}^*\mathcal{D}I_{n,m}(f_{n,m}) = (n+m)I_{n,m}(f_{n,m}), \quad f_{n,m} \in L^2(\mathbb{R}_+)^{\circ n} \circ l^2(\mathbb{N})^{\circ m}, \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

Les théorèmes usuels de l'analyse stochastique peuvent donc être exprimés avec $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$, et appliqués aux fonctionnelles de $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Par exemple, on peut définir des espaces de Sobolev sur Ω par $\| F \|_{p,k} = \| (I + \mathcal{D}^*\mathcal{D})^{k/2} F \|_p$, $p > 1$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $\mathbb{D}_{p,k} = \bar{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{p,k}}$ et $\mathbb{D}_\infty = \bigcap_{p>1,k\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}_{p,k}$. Alors si $F \in \mathbb{D}_\infty$ vérifie $(\mathcal{D}F, \mathcal{D}F)_H^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, F admet une densité $\mathcal{C}^\infty$, cf. [7], [8]. Comme sur l'espace de Wiener, c'est l'adjoint d'une extension de l'intégrale stochastique qui permet d'exprimer des conditions de régularité de densités.

4 Une autre construction dans le cas de la densité uniforme.

Considérons sur $\Omega = ([-1,1], dx/2)^{\otimes\infty}$ le processus ponctuel $X = \sum_{n\geq 0} 1_{[2n+1+\theta_n,\infty[}$, où θ_k est la k-ième projection canonique de Ω dans $[-1,1]$, $k \in \mathbb{N}$. Le compensateur $(\nu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donné par $d\nu_t = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+2-t} 1_{[2n,2n+1+\theta_n[}(t)dt$, donc l'hypothèse (i) n'est pas vérifiée. On remarque, cf. [9], qu'il est possible de poser

$$\mathcal{D}F = -\sum_{k=0}^{k=n} \left((1-\theta_k)1_{]2n,2n+1+\theta_k]} - (1+\theta_k)1_{]2n+1+\theta_k,2n+2]} \right) \partial_k f(\theta_0, \ldots, \theta_n),$$

pour $F \in \mathcal{P}$, $F = f(\theta_0, \ldots, \theta_n)$, ce qui est une variante de l'expression (1) proposée plus haut. Alors l'adjoint $\mathcal{D}^*$ de $\mathcal{D}$ dans $L^2(\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, dt/2)$ étend cette fois l'intégrale stochastique par rapport à $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ compensée avec $dt/2$ et non $d\nu_t$, et la décomposition spectrale de $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ s'obtient à l'aide des polynômes de Legendre, orthogonaux sur $([-1,1], dx/2)$, et non plus avec les polynômes de Hermite ou de Laguerre.

References

[1] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In S. Albeverio, Ph. Blanchard, and D. Testard, editors, *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[2] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51:83–109, 1994.

[3] D. Nualart and M. Zakai. Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus. *Probab. Theory Related Fields*, 73:255–280, 1986.

[4] J.M. Bismut. Calcul des variations stochastique et processus de sauts. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheories Verw. Gebiete*, 63:147–235, 1983.

[5] L. Decreusefond. Méthodes de perturbation pour les réseaux de files d'attente. Thèse, Télécom Paris, 1994.

[6] D. Nualart and E. Pardoux. Stochastic calculus with anticipative integrands. *Probab. Theory Related Fields*, 78:535–582, 1988.

[7] S. Watanabe. *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus.* Tata Institute of Fundamental Research, 1984.

[8] N. Privault. Inégalités de Meyer sur l'espace de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318:559–562, 1994.

[9] N. Privault. Calcul des variations stochastique pour la mesure de densité uniforme. *Potential Analysis*, 7(2):577–601, 1997.

[10] P. Malliavin. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. In *Intern. Symp. SDE. Kyoto*, pages 195–253, Tokyo, 1976. Kinokumiya.

[11] K. Bichteler, J.B. Gravereaux, and J. Jacod. *Malliavin Calculus for Processes with Jumps*, volume 2 of *Stochastics Monographs.* Gordon and Breach, 1987.

[12] R.F. Bass and M. Cranston. The Malliavin calculus for pure jump processes and applications to local time. *Ann. Probab.*, 14(2):490–532, 1986.

[13] M. Pontier and A.S. Üstünel. Analyse stochastique sur l'espace de Lie-Wiener. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313:313–316, 1991.

[14] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North-Holland, 1989.

Equipe d'Analyse et Probabilités
Université d'Evry
Boulevard des Coquibus
91025 Evry Cedex, France