Inégalités de Meyer sur l'espace de Poisson

Nicolas Privault

Résumé. - On propose une méthode pour transposer sur l'espace de Poisson les résultats d'analyse stochastique existant sur l'espace de Wiener, partant du fait que la loi du χ^2 de paramètre 2 est exponentielle. On obtient ainsi les inégalités de Meyer, la composition des distributions de Schwartz avec des variables aléatoires, et un critère d'intégrabilité exponentielle sur l'espace de Poisson.

Meyer inequalities on Poisson space

Abstract. - We propose a method to transpose on Poisson space existing results in stochastic analysis on the Wiener space, from the fact that the law of χ^2 with parameter 2 is exponential. We obtain in this way the Meyer inequalities, the composition of Schwartz distributions with random variables, and an exponential integrability criterion on Poisson space.

1 Introduction

L'espace de Poisson est isomorphe à l'espace de Wiener par la décomposition chaotique de Wiener-Poisson, cf. [1]. Cependant, cet isomorphisme n'est une isométrie que pour la norme L^2, ce qui limite ses applications. On se propose ici d'étudier une injection qui est isométrique en norme L^p, $p \geq 1$, de l'espace de Poisson dans l'espace de Wiener, définie en utilisant la décomposition chaotique discrète sur l'espace de Poisson. Considérons l'espace de Poisson $(l^2(\mathbb{N}), B, P)$ défini dans [2], où B est le complété de $l^2(\mathbb{N})$ et P est une probabilité sur la tribu de Borel de B telle que les applications coordonnées $\tau_k : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, soient des variables exponentielles indépendantes identiquement distribuées. On pose $L^p(B) = L^p(B, P)$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Soit $\mathcal{P}$ l'algèbre des polynômes en $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui est dense dans $L^p(B)$, $p \geq 1$. Notons $DF : L^2(B) \longrightarrow L^2(B) \otimes l^2(\mathbb{N})$ la dérivée directionnelle suivant les éléments de $l^2(\mathbb{N})$, et $\tilde{D} : L^2(B) \longrightarrow L^2(B) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$ le gradient défini par composition avec le processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$: $\tilde{D}_t F = D_{N_{t^-}} F$, cf. [3], [4]. Cet opérateur coincide avec le gradient obtenu par perturbation des temps de sauts du processus de Poisson, cf. [5], [6], et l'adjoint $\tilde{\delta}$ de $\tilde{D}$ est l'intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson compensé sur les processus prévisibles dans $L^2(B) \otimes L^2(\mathbb{R}_+)$. On sait, cf. [2],[5], que $L^2(B)$ admet une décomposition chaotique discrète

$$L^2(B) = \bigoplus_{n \geq 0} C_n$$

où C_n est engendré par les intégrales stochastiques multiples discrètes $I_n(f_n)$ de fonctions f_n dans le produit tensoriel symétrique complété $l^2(\mathbb{N})^{\circ n}$. On définit pour $F \in \mathcal{P}$ un opérateur de nombre L par

$$LI_n(f_n) = nI_n(f_n),$$

et on a la relation $L = \tilde{\delta}\tilde{D}$, cf. [3], [4], [5]. Nous allons montrer les résultats suivants:

Théorème 1 *Pour tout $p > 1$, il existe $A_p, B_p > 0$ tels que pour tout $F \in \mathcal{P}$,*

$$A_p \parallel \tilde{D}F \parallel_{L^p(B,L^2(\mathbb{R}_+))} \leq \parallel (I+L)^{1/2} F \parallel_{L^p(B)} \leq B_p(\parallel \tilde{D}F \parallel_{L^p(B,L^2(\mathbb{R}_+))} + \parallel F \parallel_{L^p(B)}).$$

Notons que ce résultat est différent du résultat de [7], qui se fonde sur une autre approche au calcul stochastique sur l'espace de Poisson, utilisant les chaos de Wiener-Poisson. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $p > 1$, on note $\mathbb{D}_{p,k}$ le complété de $\mathcal{P}$ par rapport à la norme $\parallel F \parallel_{p,k} = \parallel (I+L)^{k/2} F \parallel_{L^p(B)}$, et $\mathbb{D}_{p,-k}$ le dual de $\mathbb{D}_{p,k}$. On pose $\mathbb{D}_\infty = \bigcap_{p,k} \mathbb{D}_{p,k}$. Le dual de $\mathbb{D}_\infty$ est $\mathbb{D}_{-\infty} = \bigcup_{p,k} \mathbb{D}_{p,k}$. Le théorème précédent permet d'étendre $\tilde{D}$ comme opérateur continu de $\mathbb{D}_{p,1}$ dans $L^p(B, L^2(\mathbb{R}_+))$. On a de plus:

Proposition 1 *L'espace $\mathbb{D}_\infty$ est une algèbre.*

Le théorème d'hypercontractivité de Nelson est également vérifié:

Théorème 2 *Soient $p > 1$ et $t > 0$. Il existe $q > p$ tel que*

$$\parallel exp(-tL)F \parallel_{L^q(B)} \leq \parallel F \parallel_{L^p(B)} \qquad F \in L^q(B).$$

Soit T_{2k}, $k \in \mathbb{Z}$, le complété de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par rapport à la norme $\parallel \phi \parallel_{T_{2k}} = \parallel (1 + \mid x \mid^2 + \Delta)^k \phi \parallel_\infty$. Alors, de même que dans [8], on peut définir dans $\mathbb{D}_{-\infty}$ le composé d'une distribution sur $\mathbb{R}$ et d'une variable aléatoire sur B:

Théorème 3 *Soit $F \in \mathbb{D}_\infty$ tel que $\parallel \tilde{D}F \parallel^{-1}_{L^2(\mathbb{R}^+)} \in \bigcap_{p>1} L^p(B)$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$ et $p > 1$, il existe $C_{p,k} > 0$ tel que*

$$\parallel \phi \circ F \parallel_{p,-2k} \leq C_{p,k} \parallel \phi \parallel_{T_{-2k}} \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Le résultat suivant provient de [9] et [10] pour le cas Gaussien.

Théorème 4 *Si $F \in \mathbb{D}_{p,1}$, $p > 1$, est tel que $\| \tilde{D}F \|_{L^\infty(B,L^2(\mathbb{R}_+))} < \infty$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$E[exp(\lambda F^2)] < \infty.$$

2 Injection de l'espace de Poisson dans l'espace de Wiener

Soit (W, μ) l'espace de Wiener canonique avec $W = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$, et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^+)$. Posons $L^p(W) = L^p(W, \mu)$, $1 \le p \le \infty$. On définit de la façon suivante une injection de $L^p(B)$ dans $L^p(W)$.

Définition 1 *Si $F \in \mathcal{P}$ avec $F = f(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$, on pose*

$$\Theta F = f\left(\frac{(e_1, \dot{B})^2 + (e_2, \dot{B})^2}{2}, \dots, \frac{(e_{2n-1}, \dot{B})^2 + (e_{2n}, \dot{B})^2}{2}\right)$$

où pour $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $(g, \dot{B}) = \int_0^\infty g(t)dB_t$, $(B_t)_{t\ge0}$ étant le mouvement Brownien sur (W, μ).

On remarque que Θ s'étend comme une isométrie $\Theta : L^p(B, P) \longrightarrow L^p(W, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, du fait que la demi-somme de deux variables aléatoires normales indépendantes est une variable aléatoire exponentielle. Notons $\hat{D}$ la dérivée de Gross-Sobolev et $\hat{L}$ le générateur du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. On a les relations de commutation suivantes:

Lemme 1 *Pour $F \in \mathcal{P}$, $\| \hat{D}\Theta F \|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \sqrt{2}\Theta \| \tilde{D}F \|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$ $\mu - p.p.$*

Preuve. Si $F \in \mathcal{P}$ est de la forme $F = f(\tau_0, \dots, \tau_n)$,

$$\begin{aligned}
\| \hat{D}\Theta F \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{k=n}((e_{2k}, \dot{B})e_{2k}(t) + (e_{2k+1}, \dot{B})e_{2k+1}(t))\partial_k f\right)^2 dt \\
&= \sum_{k=0}^{k=n}((e_{2k}, \dot{B})^2 + (e_{2k+1}, \dot{B})^2)(\partial_k f)^2 \\
&= 2\Theta \sum_{k=0}^{n} \tau_k(\partial_k f(\tau_0, \dots, \tau_n))^2 \\
&= 2\Theta \| \tilde{D}F \|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} . \square
\end{aligned}$$

Lemme 2 *On a pour $p > 1$, $k \in \mathbb{Z}$: $(I+\hat{L}/2)^{k/2}\Theta F = \Theta(I+L)^{k/2}F$, $\mu-p.p.$, $F \in \mathbb{D}_{p,k}$. Pour les semi-groupes, ceci se traduit par:*

$$exp(-t\hat{L})\Theta F = \Theta exp(-2tL)F \quad F \in \mathcal{P}, \quad t \geq 0.$$

Preuve. Il est suffisant de faire la démonstration pour $F \in \mathcal{P}$ avec $F = f(\tau_k)$. On a la relation

$$\begin{aligned} & x\partial_x[f(\frac{x^2+y^2}{2})] + y\partial_y[f(\frac{x^2+y^2}{2})] - \partial_x^2[f(\frac{x^2+y^2}{2})] - \partial_y^2[f(\frac{x^2+y^2}{2})] \\ &= (x^2+y^2)f'(\frac{x^2+y^2}{2}) - \partial_x[xf'(\frac{x^2+y^2}{2})] - \partial_y[yf'(\frac{x^2+y^2}{2})] \\ &= (x^2+y^2)f'(\frac{x^2+y^2}{2}) - 2f'(\frac{x^2+y^2}{2}) - (x^2+y^2)f''(\frac{x^2+y^2}{2}). \end{aligned}$$

D'après [4], [5], on obtient $\hat{L}\Theta F = 2\Theta LF$. Ceci implique que $(I+\hat{L}/2)^{k/2}\Theta F = \Theta(I+L)^{k/2}F$ $\mu - p.p.$, $k \in \mathbb{Z}$, et le résultat s'obtient par densité. □

Preuve du Th. 1. D'après [8], il existe $A_p, B_p > 0$ tels que pour $F \in \mathcal{P}$,

$$A_p \parallel \hat{D}\Theta F \parallel_{L^p(W,L^2(\mathbb{R}_+))} \leq \parallel (I+\hat{L}/2)^{1/2}\Theta F \parallel_{L^p(W)} \leq B_p(\parallel \hat{D}\Theta F \parallel_{L^p(W,L^2(\mathbb{R}_+))} + \parallel \Theta F \parallel_{L^p(W)}).$$

La conclusion est immédiate d'après les lemmes ci-dessus. □

On remarque que le lemme 1 s'étend à $F \in \mathbb{D}_{p,1}$, $p > 1$.

Preuve de Prop. 1. D'après [8], pour $p, q, r > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\parallel (I+\hat{L}/2)^{-k/2}\Theta(FG) \parallel_{L^r(W)} \leq C \parallel (I+\hat{L}/2)^{-k/2}\Theta F \parallel_{L^p(W)} \times \parallel (I+\hat{L}/2)^{-k/2}\Theta G \parallel_{L^q(W)} \quad F, G \in \mathcal{P}.$$

On a donc

$$\parallel (I+L)^{-k/2}(FG) \parallel_{L^r(B)} \leq C \parallel (I+L)^{-k/2}F \parallel_{L^p(B)} \times \parallel (I+L)^{-k/2}G \parallel_{L^q(B)} \quad F, G \in \mathcal{P},$$

et $F, G \in \mathbb{D}_\infty$ entraine $FG \in \mathbb{D}_\infty$. □

Preuve du Th. 2. D'après [8], il existe $q > p$ tel que

$$\parallel exp(-t\hat{L}/2)\Theta F \parallel_{L^q(W)} \leq \parallel \Theta F \parallel_{L^p(W)} \quad F \in \mathcal{P}.$$

La conclusion s'obtient par le lemme 2. □

Preuve du Th. 3. Il est clair que ΘF satisfait aux hypothèses $A1$ et $A2$ de [8]. Donc il existe $C_{p,k} > 0$ tel que

$$\parallel (I+\hat{L}/2)^{-k}\phi(\Theta F) \parallel_{L^p(W)} \leq C_{p,k} \parallel \phi \parallel_{T_{-2,k}} \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Or $\| (I+\hat{L}/2)^{-k}\phi(\Theta F) \|_{L^p(W)} = \| (I+L)^{-k}\phi(F) \|_{L^p(B)}$ d'après le lemme 2, ce qui prouve le théorème. $\square$

Preuve du Th. 4. Soit $F \in \mathbb{D}_{p,1}$, $p>1$. Posons $G_n = E[exp(-\frac{1}{n}\hat{L})\Theta F \mid V_{2n}]$ et $F_n = E[exp(-\frac{2}{n}L)F \mid U_n]$, où V_n (resp. U_n) est la tribu sur W engendrée par $(e_0,\dot{B}),\dots,(e_{2n+1},\dot{B})$ (resp. sur B par $(\tau_0,\dots,\tau_n)$). Alors $G_n = g_n((e_0,\dot{B}),\dots,(e_{2n+1},\dot{B}))$ avec $g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n+2})$, et $(G_n)_{n\geq 0}$ converge vers ΘF dans $L^p(W)$, $p>1$. On a de plus $G_n = \Theta F_n$ $\mu - p.p.$ et:

$$\begin{aligned}
2 \| \tilde{D}F_n \|^2_{L^\infty(B,L^2(\mathbb{R}_+))} &= \| \hat{D}G_n \|^2_{L^\infty(W,L^2(\mathbb{R}_+))} \\
&= \| \hat{D}\Theta F_n \|^2_{L^\infty(W,L^2(\mathbb{R}_+))} \\
&\leq exp(-\frac{2}{n}) \| \hat{D}\Theta F \|^2_{L^\infty(W,L^2(\mathbb{R}_+))} \\
&\leq 2exp(-\frac{2}{n}) \| \tilde{D}F \|^2_{L^\infty(B,L^2(\mathbb{R}_+))} \\
&\leq 2 \| \tilde{D}F \|^2_{L^\infty(B,L^2(\mathbb{R}_+))} \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

On a donc d'après [10]:

$$\begin{aligned}
P(| F |> c) &= \mu(| \Theta F |> c) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mu(| G_n |> c) \\
&\leq exp\left(-\frac{c^2}{2\sup_n \| \hat{D}G_n \|^2_{L^\infty(W,L^2(\mathbb{R}_+))}}\right) \\
&\leq exp\left(-\frac{c^2}{4\sup_n \| \tilde{D}F_n \|^2_{L^\infty(W,L^2(\mathbb{R}_+))}}\right).
\end{aligned}$$

Il suffit de poser $K^2 = 2\sup_n \| \tilde{D}F_n \|^2_{L^\infty(B,L^2(\mathbb{R}_+))}$ pour obtenir

$$P(| F |> c) \leq exp(-\frac{c^2}{2K^2}),$$

et ceci prouve Th. 4.

Remarque 1 *On peut aussi utiliser l'espace de Wiener complexe au lieu de l'espace de Wiener pour exprimer l'injection* Θ*.*

References

[1] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In *Séminaire de Probabilités XXIV*, volume 1426 of *Lecture Notes in Math.*, pages 154–165. Springer, Berlin, 1990.

[2] N. Privault. Calcul chaotique et variationnel pour le processus de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316:597–600, 1993.

[3] N. Privault. Décompositions chaotiques sur l'espace de Poisson et applications. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317:385–388, 1993.

[4] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51:83–109, 1994.

[5] N. Bouleau and F. Hirsch. *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space.* de Gruyter, 1991.

[6] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In S. Albeverio, Ph. Blanchard, and D. Testard, editors, *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[7] L. Wu. Inégalités de Sobolev sur l'espace de Poisson. In *Séminaire de Probabilités XXI*, volume 1247 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1987.

[8] S. Watanabe. *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus.* Tata Institute of Fundamental Research, 1984.

[9] X. Fernique. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 270:1698–1699, 1970.

[10] A.S. Üstünel. Intégrabilité exponentielle de fonctionnelles de Wiener. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315:279–282, 1992.

Laboratoire de probabilités
4, Place Jussieu - Tour 56
75252 Paris, France